Πιθ. Μάθημα 9/1/2017

SOS Θα υπάρχει θέμα από εδώ

Αλλαγή Μεταβλητών:

Έχω τ.μ. X με γνωστή κατανομή. Ζητώ κατανομή μιας τ.μ. $Y=g(X)$

Μέθοδος του μετασχηματισμού:

Πρόταση:

Έστω συνεχής τ.μ. X με σππ f_X γνωστή και σύνολο τιμών το διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $y=g(x)$, $x \in I$ και υποθέτουμε ότι:

(i) Ο $y=g(x)$ είναι 1-1 μετασχηματισμός του I στο $g(I)=\{y : y=g(x), x \in I\}$

(ii) Η $\frac{d}{dy} g^{-1}(y)$ είναι συνεχής και $\frac{d}{dy} g^{-1}(y)=0$ $\forall y \in g(x)$

Τότε η τ.μ. Y είναι συνεχής με σππ $f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d g^{-1}(y)}{dy} \right|$, $y \in g(I)$

Παράδειγμα:

Έστω $X \sim Beta(\alpha,\beta)$

Κατανομή της τ.μ. $Y=-\ln X$

Λύση:

$f_X(x)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$, $0<x<1$, $\alpha,\beta>0$

Τιμές τ.μ. X: $0<x<1$. Άρα $I=(0,1)$

Θεωρώ τον μετασχηματισμό: $y=g(x)=-\ln x$

Τιμές τ.μ. Y: $y=-\ln x$, $x \in (0,1)$

Άρα τιμές Y: $y \in (0,\infty)=g(I)$

(i) Η $y=g(x)=-\ln x$ είναι 1-1 αφού η $-\ln$ είναι γν. φθίνουσα.

Αλλιώς: Αρκεί για $x_1,x_2 \in I$ για τα οποία ισχύει $g(x_1)=g(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

(ii) Αφού g είναι 1-1, $\exists$ ο g^{-1} και είναι $x=g^{-1}(y)=e^{-y}$

$\frac{d g^{-1}(y)}{dy} = -e^{-y}$ είναι συνεχής και $\neq 0$ για $y \in g(I)=(0,\infty)$

Επομένως $f_Y(y)=f_X(e^{-y}) \left| \frac{d g^{-1}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} (e^{-y})^{\alpha-1}(1-e^{-y})^{\beta-1} e^{-y} =$

$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} e^{-\alpha y} (1-e^{-y})^{\beta-1} \qquad y \in (0,\infty)$$

5ος

Παράδειγμα: (τελευταίο)

Έστω συνεχής τμ X με σππ $f_X(x) = \theta x^{-\theta-1}$, $x>1$, $\theta>0$.

Κατανομή της τμ $Y = \ln X$?

Λύση:

Τιμές της X: $x>1$ Άρα $I = (1,\infty)$

Θεωρώ το μετασχηματισμό $y = \ln x = g(x)$, $x \in I$

Τιμές της τμ Y: $y = \ln x$, $x \in I$

Άρα $y>0$ και επομένως $g(I) = (0,\infty)$

(i) Η g είναι 1-1 αφού ο $\ln x$ είναι γν. αύξουσα

Εύρεση g^{-1}: $y = g(x) = \ln x \Rightarrow x = g^{-1}(y) = e^y$

(ii) $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = e^y$ συνεχής και $\neq 0$ για $y \in (0,\infty)$

Η σππ της Y: $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| = \theta (e^y)^{-\theta-1} |e^y| =$

$= \theta e^{-\theta y}$, $y>0$

Άρα $Y \sim Εκθ(\theta)$

Παράδειγμα:
$X \sim U(0,1)$
καταιγίδι $Y = e^X$
Λύση
$f_X(x) = 1 \quad , \quad x \in (0,1)$
Θεωρώ μετασχηματισμό : $y = g(x) = e^x \, , \, x \in (0,1) = I$
Τιμές Y : $y \in (1,e) = g(I)$

(i) Ο $y = g(x) = e^x$ είναι 1-1 αφού η εκθετική συνάρτηση γν. αύξουσα

Άρα $\exists g^{-1} : x = g^{-1}(y) = \ln y$

(ii) $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{1}{y}$ συνεχής και $\neq 0$, $y \in (1,e)$

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| = 1 \cdot \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{y} \quad , \quad y \in (1,e)$$

Πρόταση:
Έστω συνεχής τ.μ. X με σππ f_X γνωστή και σύνολο τιμών το διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $y = g(x)$, $x \in I$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει μια διαμέριση του I, η $\{I_1, I_2, \dots, I_k\}$ τέτοια ώστε:
(i) ο μετασχηματισμός $y = g(x)$ είναι 1-1 μετασχηματισμός του I_k στο $g(I_k) = \{ y : y = g(x) , x \in I_k \}$
(ii) Αν $g_k^{-1}(y)$ ο αντίστροφος μετασχηματισμός της g στο I_k, ~~υπάρχει~~ υποθέτουμε ότι: $\frac{d g_k^{-1}(y)}{dy}$ συνεχής και $\neq 0$ για $i = 1, \dots, k$
Τότε η τ.μ. Y είναι συνεχής με σύνολο τιμών το $g(I)$ και σ.π.π.

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{n} f_X(g_k^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g_k^{-1}(y) \right| \quad , \quad y \in g(I)$$

Παράδειγμα

Έστω συνεχής τ.μ. X με σππ $f_X(x)=\frac{x+1}{2}$, $-1<x<1$, $x\neq 0$

σππ $Y=X^2$

Λύση

Το $I=(-1,1)-\{0\}$

Θεωρώ το μετασχηματισμό $y=g(x)=x^2$, $x\in I$

Τιμές Y: $y=g(x)=x^2$, $x\in I$

Προφανώς $y\in(0,1)=g(I)$

Η g δεν είναι 1-1 στο I γιατί πχ $g(-1/2)=g(1/2)=1/4$

αλλά $-\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}$

Η g όμως είναι 1-1 στο $I_1=(-1,0)$

και είναι 1-1 στο $I_2=(0,1)$

Αν $x\in I_1=(-1,0)$ τότε $x=g_1^{-1}(y)=-\sqrt{y}$, $y\in(0,1)$

Αν $x\in I_2=(0,1)$ τότε $x=g_2^{-1}(y)=\sqrt{y}$, $y(0,1)$

Επιπλέον: $\frac{d}{dy}g_1^{-1}(y)=-\frac{1}{2\sqrt{y}}\neq 0$ συνεχής για $y\in(0,1)$

$\frac{d}{dy}g_2^{-1}(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\neq 0$ συνεχής για $y\in(0,1)$

Άρα:

$$f_Y(y)=\sum_{k=1}^{2}f_X(g_k^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g_k^{-1}(y)\right|=$$

$$=\frac{(-\sqrt{y})+1}{2}\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|+\frac{(\sqrt{y})+1}{2}\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|,\quad y\in(0,1)$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}},\quad y\in(0,1)$$

Μέθοδος Ροπογεννήτριας (συνεχής και διακριτή τ.μ.)

Πρόβλημα: Γνωρίζω κατανομή της X και ζητώ κατανομή της $Y = g(x)$

$$M_Y(t) \overset{\text{ορ}}{=} E(e^{tY}) = E(e^{tg(x)}) \overset{\text{ορ}}{=} \begin{cases} \sum_x e^{tg(x)} P_X(x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tg(x)} f_X(x)dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Αν η $M_Y(t)$ στην οποία θα καταλήξω είναι η ροπογεννήτρια κάποιας γνωστής κατανομής $\Rightarrow$ η $Y \sim$ γνωστή κατανομή

Παράδειγμα:
Έστω τ.μ. X με σππ $f_X(x) = \theta x^{-\theta-1}$ $\quad x > 1, \; \theta > 0$
Κατανομή $Y = \ln x$?

Λύση:

$$M_Y(t) \overset{\text{ορ}}{=} E(e^{tY}) = E(e^{t\ln x}) = E(e^{\ln x^t}) = E(x^t) =$$

$$= \int_1^{\infty} \theta x^t x^{-\theta-1} dx = \theta \int_1^{\infty} x^{t-\theta-1} dx$$

$$\Rightarrow M_X(t) = \theta \left[\frac{x^{t-\theta}}{t-\theta}\right]_1^{\infty} \overset{t<\theta}{=} \theta \cdot \left[0 - \frac{1}{t-\theta}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{M_Y(t) = \frac{\theta}{\theta - t}, \quad t < \theta}$$

Γνωρίζουμε ότι αν $W \sim Εκθ(\lambda)$. Τότε $M_W(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \; t < \lambda$ $\quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow Y \sim Εκθ(\theta)$$

Παράδειγμα:

Τ.μ. X κατανομή Gumbel

με ασκ $F_X(x) = \exp\{-\exp[-(x-a)/\beta]\} = e^{-e^{-\frac{(x-a)}{\beta}}}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$

$Y = \exp\left\{-\frac{x-a}{\beta}\right\} = e^{-\frac{x-a}{\beta}}$

Λύση

Μέθοδος ασκ

$F_Y(y) \overset{\text{ορ}}{=} P(Y \le y) = P\left(e^{-\frac{x-a}{\beta}} \le y\right) = P(-x+a \le \beta \ln y) =$

$= P(X \ge a - \beta \ln y) = 1 - P(X \le a - \beta \ln y) \overset{\text{ορ}}{=} F_X(a - \beta \ln y)$

(...).

~~Πως προέκυψε η κατανομή Gumbel??~~

~~Έστω παρατηρήσεις τ.μ. $X_1, X_2, \dots, X_n$ περιγράφω από F_X~~

~~$F_{X_n} \xrightarrow{n \to \infty}$~~